Olimpiada Națională de Matematică

Etapa pe localitate, 11 februarie 2012

Clasa a IX-a mate-info - Barem de notare

1. a) Demonstrați că $a^3-3a+2\geq 0$ **,** $\forall a\in R_+$ **;**

b)Folosind eventual punctul a) deduceți că: $\dfrac{a}{b^3+5}+\dfrac{b}{a^3+5}\leq\dfrac{1}{3}$ **,** $\forall a,b\in[0,1]$ **.**

Soluție: a)Inegalitatea se scrie echivalent: $a^3-a-2a+2\geq 0$ $\Leftrightarrow a(a-1)(a+1)-2(a-1)\geq 0$ $\Leftrightarrow (a-1)(a^2+a-2)\geq 0$ $\Leftrightarrow (a-1)^2(a+2)\geq 0$, relație adevărată pentru $\forall a\in R_+$ **.** Egalitatea are loc pentru a=1. (4p)

b) Cum $a,b\in[0,1]$ deducem că $a^3\leq 1$ şi $b^3\leq 1$. Obținem:

$$\frac{a}{b^3+5}+\frac{b}{a^3+5}\leq\frac{a}{a^3+b^3+4}+\frac{b}{a^3+b^3+4}=\frac{a+b}{a^3+b^3+4}\overset{cf.a)}{\leq}\frac{a+b}{3a+3b}=\frac{1}{3}$$ (3p)

2. Calculați $S=\left\lfloor\sqrt{n^2+1}\right\rfloor+\left\lfloor\sqrt{n^2+5}\right\rfloor$ **, unde** $n\in N$ **.**

***Notă*. [** x **] reprezintă partea întreagă a lui** x **.**

Soluție: Pentru $n=0$ avem $S=1+\left\lfloor\sqrt{5}\right\rfloor=3$. Pentru $n=1$ avem $S=\left\lfloor\sqrt{2}\right\rfloor+\left\lfloor\sqrt{6}\right\rfloor=3$. Pentru $n=2$ avem $S=\left\lfloor\sqrt{5}\right\rfloor+\left\lfloor\sqrt{9}\right\rfloor=5$. (3p)

Pentru $n\geq 3$ avem $n^2\leq n^2+1<n^2+5<(n+1)^2$ $\Leftrightarrow n\leq\sqrt{n^2+1}<\sqrt{n^2+5}<n+1$, deci $\left\lfloor\sqrt{n^2+1}\right\rfloor=\left\lfloor\sqrt{n^2+5}\right\rfloor=n$ de unde obținem $S=2n$. (4p)

3. Calculați valoarea minimă a expresiilor $E=|x+2011|+|x-2012|$ **şi** $F=|x+1|+|x+2|+|x+3|...+|x+2012|$**, unde** $x\in R$**.**

Soluție: Folosind inegalitatea modulului obținem : $E = |x+2011| + |x-2012| = |x+2011| + |2012-x| \geq |x+2011+2012-x| = 4023$, deci minimul expresiei E este 4023, care se realizează de exemplu pentru $x=0$. (4p)

Avem $|x+1| + |x+2012| = |-x-1| + |x+2012| \geq |-x-1+x+2012| = 2011$, egalitatea realizându-se pentru $x \in [-2012,-1]$.

Analog obținem $|x+2| + |x+2011| \geq 2009$, egalitatea realizându-se pentru $x \in [-2011,-2]$.

. . . .

Ultima relație este $|x+1006| + |x+1007| \geq 1$, egalitatea realizându-se pentru $x \in [-1007,-1006]$.

Însumând inegalitățile obținem că $F \geq 2011 + 2009 + ... + 1 = 1005^2$, egalitatea realizându-se pentru $x \in [-2012,-1] \bigcap [-2011,-2] \bigcap ... \bigcap [-1007,-1006] = [-1007,-1006]$, deci minimul lui F este 1005^2. (3p)

4. **Fie paralelogramul $ABCD$ şi punctele $M \in (AD), N \in (BC), P \in (MN)$ astfel încât $\frac{BN}{BC} + 2\frac{AM}{AD} = 2$ şi $\frac{NP}{PM} = 2$. Arătați că punctele B, P, D sunt coliniare.**

Soluție: Notăm $\frac{BN}{BC} = k$ şi $\frac{AM}{AD} = p$. Avem

$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{NP} = k\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{NM} = k\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM})$. Cum $\overrightarrow{NB} = -k\overrightarrow{BC}$ şi

$\overrightarrow{AM} = p\overrightarrow{AD} = p\overrightarrow{BC}$ deducem

$$\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}(-k\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + p\overrightarrow{BC}) \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{BP} = \left(\frac{1}{3}k + \frac{2}{3}p\right)\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{1}{3}(k+2p)\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$$, de unde

deducem că B, P, D coliniare. (7p)

Probleme propuse de prof. Mihai Bunget, CNTV Tg-Jiu